

Идентификация параметров распределенной динамической системы, описываемой одномерным уравнением диффузии-адвекции-реакции, с применением расширенного фильтра Калмана

Копытина Е.А.

Копытин А.В.

Матвеев М.Г.

Постановка задачи

Рассмотрим распределенную динамическую систему, описываемую одномерным уравнением диффузии-адвекции-реакции:

$$\frac{\partial x(t, l)}{\partial t} = p_D \frac{\partial^2 x(t, l)}{\partial l^2} + p_S \frac{\partial x(t, l)}{\partial l} + p_A x(t, l), \quad (1)$$

где $\mathbf{p} = (p_D, p_S, p_A)^T$ – вектор оцениваемых параметров. Пусть $\{(t_k, l_i) : k = 1, \dots, n; i = 0, \dots, m-1\}$ – регулярная прямоугольная сетка с шагом Δt по времени и шагом Δl по пространственной переменной, в узлах которой мы наблюдаем значения функции x с некоторой погрешностью.

Идентификация параметров МНК

Составим явную четырехточечную разностную схему для уравнения (1), заменив точные значения решения в узлах сетки x_i^k на наблюдаемые значения y_i^k :

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = p_D \frac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{(\Delta l)^2} + p_S \frac{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}{2\Delta l} + p_A y_i^k + \zeta_i^k, \quad (2)$$

неявную четырехточечную разностную схему:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = p_D \frac{y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}}{(\Delta l)^2} + p_S \frac{y_{i+1}^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}}{2\Delta l} + p_A y_i^{k+1} + \upsilon_i^k, \quad (3)$$

а также схему Кранка-Николсон:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = & \frac{p_D}{2(\Delta l)^2} \left((y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}) + (y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k) \right) + \\ & + \frac{p_S}{4\Delta l} \left((y_{i+1}^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}) + (y_{i+1}^k - y_{i-1}^k) \right) + \frac{p_A}{2} (y_i^{k+1} + y_i^k) + \zeta_i^k, \end{aligned} \quad (4)$$

где ζ_i^k , υ_i^k и ζ_i^k – случайные ошибки

Применение комбинации расширенного фильтра Калмана и метода наименьших квадратов

Уравнения (4), но уже для точного решения x , можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & (\theta_2 - \theta_1)x_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\theta_1 - \theta_3)x_i^{k+1} - (\theta_1 + \theta_2)x_{i+1}^{k+1} = \\ & = (\theta_1 - \theta_2)x_{i-1}^k + (1 - 2\theta_1 + \theta_3)x_i^k + (\theta_1 + \theta_2)x_{i+1}^k, \end{aligned}$$

где $\theta_1 = \frac{p_D \Delta t}{2(\Delta l)^2}$, $\theta_2 = \frac{p_S \Delta t}{4\Delta l}$, $\theta_3 = \frac{p_A \Delta t}{2}$, $i = 1, \dots, m-2$, $k = 0, \dots, n-1$.

Или в матричном виде:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(x_0^k, x_0^{k+1}, x_{m-1}^k, x_{m-1}^{k+1})^T, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (5)$$

где $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ и $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ – трехдиагональные матрицы размера $(m-2) \times (m-2)$, зависящие от вектора параметров

Применение комбинации расширенного фильтра Калмана и метода наименьших квадратов

Рассматриваемая нами линейная динамическая модель может быть записана в пространстве состояний следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\xi}_k), \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \end{cases}$$

Поскольку $\boldsymbol{\theta}$ – постоянный вектор, вполне естественно положить

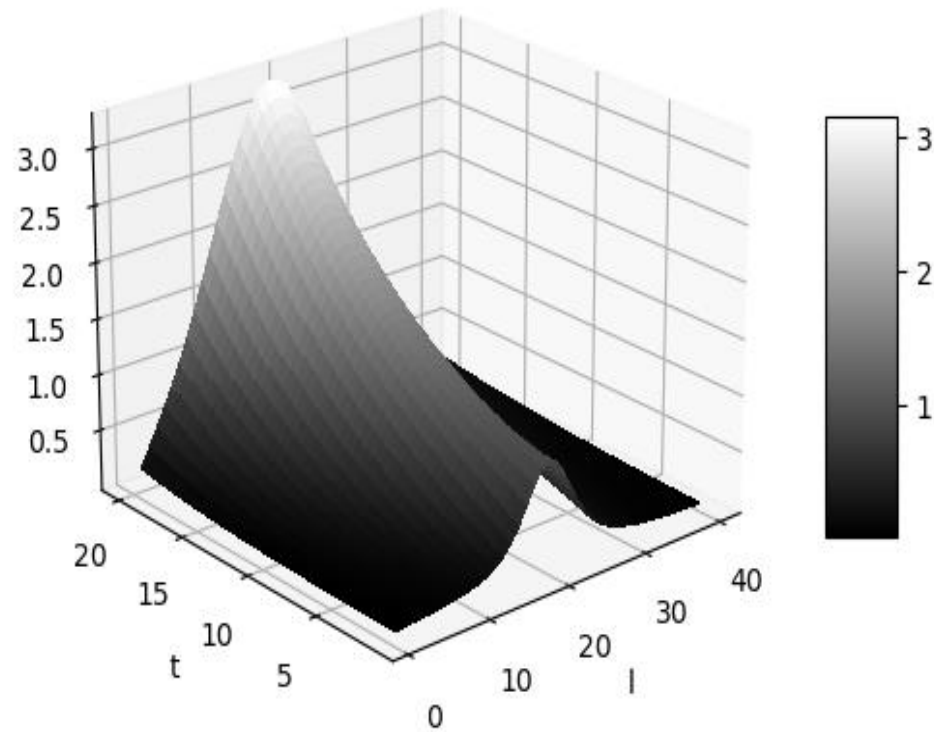
$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (6)$$

Тогда система (5) вместе с предположением (6) может быть переформулирована как нелинейная модель

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_k)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{u}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_k)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_k)\boldsymbol{\xi}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_k = (\mathbf{I}_{m-2} \quad \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \end{pmatrix} + \boldsymbol{\eta}_k, \end{cases}$$

Обсуждение результатов вычислительного эксперимента

Решим численно уравнение (1) с истинными значениями параметров $p_D = 1$, $p_S = 0.1$ и $p_A = 0.1$, граничным условием $x(t, 0) = 0$ и начальным условием $x(0, l) = (1 + 0.1 \times (20 - l)^2)^{-1}$ в области $[1, 20] \times [1, 40]$.



Результаты моделирования при $\Delta t = 1.0$

| Параметры | | P_D | P_S | P_A |
|--------------------|--------------------|-------|--------|-------|
| Значения | | 1.0 | 0.1 | 0.1 |
| Bias $\times 10^3$ | Каскадный метод | -55.9 | -0.2 | -0.5 |
| | Байесовский метод | -35.6 | 1.0 | 0.6 |
| | Интегральный метод | -5.8 | -0.005 | -0.07 |
| | МНК-КНФК | -1.5 | 0.3 | -0.1 |
| STD $\times 10^3$ | Каскадный метод | 40.5 | 6.2 | 0.8 |
| | Байесовский метод | 22.2 | 3.8 | 0.5 |
| | Интегральный метод | 21.0 | 3.7 | 0.5 |
| | МНК-КНФК | 20.6 | 3.6 | 0.5 |
| RMSE $\times 10^3$ | Каскадный метод | 69.1 | 6.2 | 1.0 |
| | Байесовский метод | 42.0 | 3.9 | 0.8 |
| | Интегральный метод | 21.7 | 3.7 | 0.5 |
| | МНК-КНФК | 20.6 | 3.6 | 0.5 |

Заключение

Основными результатами данного исследования являются:

1. Разработка нового комбинированного метода идентификации пространственно-распределенных динамических систем на основе расширенного фильтра Калмана и метода наименьших квадратов, который имеет низкую среднюю абсолютную ошибку.
2. Получено новое знание, заключающееся в том, что качество расширенного фильтра Калмана зависит от выбора разностной схемы, которая лежит в основе его работы.
3. Найдена эффективная разностная схема Кранка-Николсон.